

## Учет потерь в тензорной модели инфокоммуникационных сетей

Пономарев Д.Ю.

### Аннотация

Основой для обеспечения информационных потребностей современного общества является сложный комплекс взаимодействующих сетей, систем и устройств. В настоящее время данный комплекс обеспечивает взаимодействие на всех уровнях модели взаимодействия открытых систем. Таким образом, можно отметить, что на сегодняшний день необходимо рассматривать процесс обмена информацией, как единое целое без разделения на технические или информационные уровни обработки/передачи. В связи с этим, основным объектом исследования являются инфокоммуникационные сети, как отражающие современное развитие средств коммуникаций.

Учитывая глобальный характер обмена информацией при анализе инфокоммуникационных сетей необходимо учитывать как сам процесс обработки/передачи информации, так и структуру сети, обеспечивающую этот процесс. Наиболее подходящим подходом для этого является тензорный анализ сетей, как обладающий возможностями по учету процессно-структурного взаимодействия.

Однако, в реальных инфокоммуникационных сетях возможны потери трафика, связанные с ограниченностью ресурсов сетей и систем. В данной работе предложен метод учета данных потерь с использованием недиагональных элементов матрицы интенсивностей обслуживания тензорной модели инфокоммуникационных сетей. Получены результаты для узловых сетей различной структуры. На примере сети из трех систем показан метод получения матрицы интенсивностей обслуживания для учета потерь без ограничения по дисциплине обслуживания. Проведенное моделирование подтверждает возможность использования данного подхода для учета потерь в тензорной модели инфокоммуникационных сетей.

### Abstract

The basis for the information needs of modern society is a complex set of interacting networks, systems and devices. At present, this complex interacts at all levels of the Open Systems Interconnection. Thus, we are need to consider the information exchange process as a whole without separating technical and information levels of processing/transference. In this regard, the main object of the study is an infocommunication network, as representing the modern development of means of communication. Modern process of the exchange of information has the global nature. Therefore, interaction of the process of processing/transmission and network structure should be considered during the analysis of infocommunication networks. The tensor analysis of networks is the most appropriate approach for it because this method of analysis let take to account the process-structure interaction.

However, in real infocommunication networks, loss of traffic is possible that is associated with the limited resources of networks and systems. In this paper we propose a method for take to account of traffic loss in the tensor model of infocommunication networks with using of the off-diagonal elements of service rate matrix. Results are obtained for the nodal networks of different structures. For example, there is present results for network of three systems without the discipline of service limits. The simulation confirms the possibility of using this approach to account for losses in the tensor model of infocommunication networks.

## Введение

Современные инфокоммуникации представляют собой сложный комплекс систем обработки, обеспечивающих обслуживание информационных потоков с за-



данным уровнем качества обслуживания (QoS – Quality of Service). Основными показателями QoS при этом являются: вероятность потери пакета, среднее время задержки пакета в системе, дисперсия времени задержки пакета. Естественно, что поддержка QoS обеспечивается при эксплуатации оборудования и учитывается на этапе проектирования. Однако, проектирование современных инфокоммуникационных сетей затруднено трудоемкостью расчетов параметров оборудования, при которых необходимый уровень QoS будет поддерживаться на заданном уровне, что усложняется как сложной топологией таких сетей, так и использованием дополнительных протоколов обработки на различных уровнях модели взаимодействия открытых систем (ВОС или *OSI*). Трудность решения данной задачи для глобальных сетей повышается в связи с использованием различных технологий инфокоммуникационных сетей, наличием различного уровня сложности топологий сетей и необходимостью обеспечения различных уровней качества обслуживания для разных информационных потоков. В современной науке для решения задачи проектирования существующих и перспективных инфокоммуникационных сетей используются различные методы тензорного анализа сетей [1–4].

Основоположником тензорной методологии анализа сетей является известный американский ученый и инженер Г. Крон, который впервые использовал тензорный анализ и топологию в приложении к теории электрических сетей [1]. В [2] вводится понятие кибернетической мощности и используется ее инвариант при тензорном подходе к решению задачи выбора топологии сети. Возможным вариантом приложения тензорного анализа сетей к телекоммуникациям представлен в [3]. Следует отметить, что в [2, 3] рассматривается в качестве основного параметра оценки и оптимизации среднее время задержки, определенное для модели вида  $M/M/1$ , что является в некоторой мере ограничением. В [4] используется в качестве инвариантного уравнения  $\lambda = \mu\rho$ , что позволяет использовать модели отличные от  $M/M/1$ .

Основой тензорного метода является геометрическое представление исследуемых параметров, т.е. геометрическая интерпретация взаимосвязи характеристик элементов сети. Геометрический смысл представленного в данной работе метода заключается в следующем. Определение значений исследуемых характеристик или параметров (для инфокоммуникаций можно определить эти характеристики, как: средняя очередь, среднее время задержки, загрузка узлов или каналов, интенсивность поступления требований, пропускная способность и т.д.) можно проводить, используя геометрически инвариантное представление данных характеристик в той системе координат, где их определение будет более простым.

## 1. Постановка задачи

В данной работе используется метод анализа систем обработки информации, основанный на следующих предположениях. Во-первых, что поток вызовов с од-



ной и той же интенсивностью ( $\lambda$ ) поступления вызовет при неизменной интенсивности обслуживания в узлах ( $\mu$ ) одну и ту же загрузку ( $\rho$ ) устройств при изменении структуры и можно считать, что будет выполняться соотношение (инвариант):

$$\rho\lambda = \rho'\lambda' \quad (1)$$

где переменные со штрихом для одной структуры сети, без штриха для другой. Во-вторых, объединение систем в единую сеть не вызывает изменений процесса обслуживания информационного потока, т.е. тогда анализ любой сложной системы (сети) будет связан с определением простейшего элемента, его свойств и переносом алгоритма анализа на всю сложную систему (сеть). В-третьих, изменение структуры сети не предполагает качественное изменение основных соотношений между физическими величинами, описывающими простейший элемент, а определяет только их численное изменение [4].

Для применения тензорного подхода к задаче исследования сетей обработки информации необходимо определить «примитивную сеть». Примитивная сеть, при узловом методе, состоит из не замкнутых обособленных ветвей, ее простейший элемент – ветвь. Уравнение состояния ветви определяется соотношением:

$$\lambda = \rho\mu \quad (2)$$

Геометрическими объектами примитивной сети будут: вектор интенсивностей потоков сообщений в ветвях  $\Lambda'$ ; вектор загрузки систем массового обслуживания  $P'$ ;  $M'$  - квадратная матрица, диагональные элементы выражают интенсивности обслуживания пакетов, другие элементы характеризуют взаимное влияние систем друг на друга:

$$M' = \begin{bmatrix} \mu'_{11} & \dots & \mu'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu'_{n1} & \dots & \mu'_{nn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Определяем соответствие между загрузками исходной  $P$  и примитивной  $P'$  сетей через матрицу перехода  $A$ , как  $P' = AP$  и используя (2), можно записать:  $AP\Lambda' = P\Lambda$ . Далее, находя соотношение между загрузками примитивной ( $\Lambda'$ ) и исходной ( $\Lambda$ ) сетей, как  $\Lambda' = (A^T)^{-1} \Lambda$ . Следовательно,  $(A^T)^{-1} \Lambda = M'AP$ . Окончательно, уравнение будет иметь вид:

$$(A^T M' A) P = A^T \Lambda' \quad (4)$$

Далее, решая полученное уравнение относительно  $P$ , находим коэффициенты использования узлов в сети, как:  $\bar{\rho}_{узлов} = AP$ . Получение решения уравнения (4) не представляет сложностей практически для любого масштаба сети обработки



информации [4, 5] и алгоритм решения может быть формализован для программной реализации [5]. Однако, особый интерес вызывает возможность использования недиагональных элементов матрицы (3) для учета потерь в тензорной модели инфокоммуникационных сетей и систем. Таким образом, задачей является определение формы недиагональных элементов матрицы (3) для учета потери пакетов в сети.

## 2. Частное решение для узловой тензорной модели

С целью определения возможности учета влияния потерь рассмотрим модель системы обработки информации в виде сети массового обслуживания из трех систем (рис.1).

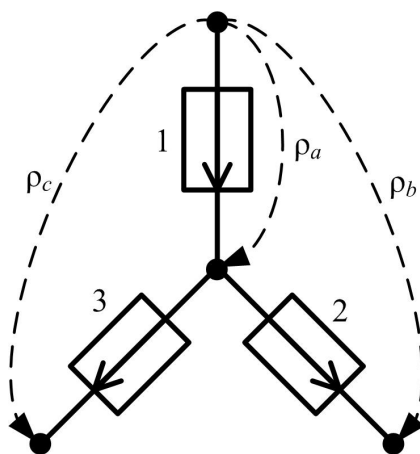


Рис. 1. Тензорная модель системы обработки информации

На рис. 1 введены узловые загрузки  $\rho_a$ ,  $\rho_b$  и  $\rho_c$  для определения матрицы перехода  $\mathbf{A}$ . Используя (4), определяем уравнение, решение которого позволит найти загрузки  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и  $\rho_3$ :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b \\ \rho_c \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Определяем матрицу перехода, исходя из представленной тензорной модели и алгоритма [5]. Следовательно, матрица перехода имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, уравнение (4) для тензорной модели исследуемой системы (рис. 1) можно записать, как:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b \\ \rho_c \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Производя умножение матриц приводим уравнение для исследуемой системы к следующему виду ( $\mu_x = \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{23} + \mu_{32} + \mu_{33} - \mu_{12} - \mu_{13} - \mu_{21} - \mu_{31}$ ):

$$\begin{pmatrix} \mu_x & \mu_{12} - \mu_{22} - \mu_{32} & \mu_{13} - \mu_{23} - \mu_{33} \\ \mu_{21} - \mu_{22} - \mu_{23} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} - \mu_{32} - \mu_{33} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b \\ \rho_c \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Следует отметить, что между интенсивностями правой части существует соотношение  $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$ . Поэтому, вводя вероятность перехода во вторую систему  $p_2$ , определим интенсивности во второй и третьей системах, как:  $\lambda_2 = p_2 \lambda_1$  и  $\lambda_3 = (1 - p_2) \lambda_1$ .

Для нахождения решения полученной системы уравнений в общем виде используем метод Крамера. С этой целью найдем определитель матрицы коэффициентов, как:

$$\begin{vmatrix} \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{23} + \mu_{32} + \mu_{33} - \mu_{12} - \mu_{13} - \mu_{21} - \mu_{31} & \mu_{12} - \mu_{22} - \mu_{32} & \mu_{13} - \mu_{23} - \mu_{33} \\ \mu_{21} - \mu_{22} - \mu_{23} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} - \mu_{32} - \mu_{33} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix} \\ = \mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{11}\mu_{23}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{22}\mu_{31}$$

Тогда, для искомой загрузки  $\rho_a$  можно записать:

$$\rho_a = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 & \mu_{12} - \mu_{22} - \mu_{32} & \mu_{13} - \mu_{23} - \mu_{33} \\ \lambda_2 & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \lambda_3 & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix}}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{11}\mu_{23}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{22}\mu_{31}}$$

Находя определитель в числителе и приводя подобные, выражение для узловой загрузки  $\rho_a$  можно представить в виде:



$$\rho_a = \frac{\mu_{22}\mu_{33}\lambda_1 + \mu_{13}\mu_{32}\lambda_2 + \mu_{12}\mu_{23}\lambda_3 - \mu_{23}\mu_{32}\lambda_1 - \mu_{12}\mu_{33}\lambda_2 - \mu_{13}\mu_{22}\lambda_3}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{11}\mu_{23}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{22}\mu_{31}}$$

С учетом вероятности  $p_2$  выражение для  $\rho_a$  преобразуется к виду:

$$\rho_a = \frac{\mu_{22}\mu_{33} - \mu_{23}\mu_{32} + (\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{33})p_2 + (\mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}\mu_{22})(1 - p_2)}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{11}\mu_{23}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{22}\mu_{31}}\lambda_1 \quad (5)$$

Аналогичные преобразования производим для получения  $\rho_b$  и  $\rho_c$ .

Тогда, для узловой загрузки  $\rho_b$  можно записать:

$$\rho_b = \frac{(\mu_{22}\mu_{33} - \mu_{21}\mu_{33})\lambda_1 + \mu_{11}\mu_{33}\lambda_2}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{11}\mu_{23}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{22}\mu_{31}}$$

а для узловой загрузки  $\rho_c$ :

$$\rho_c = \frac{(\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{21}\mu_{32} - \mu_{22}\mu_{31})\lambda_1 - \mu_{11}\mu_{32}\lambda_2 + \mu_{11}\mu_{22}\lambda_3}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{11}\mu_{23}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{22}\mu_{31}}$$

С учетом вероятности  $p_2$  выражения для  $\rho_b$  и  $\rho_c$  примут следующий вид:

$$\rho_b = \frac{(\mu_{22}\mu_{33} - \mu_{21}\mu_{33}) + \mu_{11}\mu_{33}p_2}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{11}\mu_{23}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{22}\mu_{31}}\lambda_1 \quad (6)$$

$$\rho_c = \frac{(\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{21}\mu_{32} - \mu_{22}\mu_{31}) - \mu_{11}\mu_{32}p_2 + \mu_{11}\mu_{22}(1 - p_2)}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{11}\mu_{23}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{22}\mu_{31}}\lambda_1 \quad (7)$$

Для нахождения загрузок в узлах используем обратное преобразование:

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b \\ \rho_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b \\ \rho_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b - \rho_a \\ \rho_c - \rho_a \end{pmatrix}$$

Откуда, получаем, что загрузка в первой системе, в соответствии с (5), определяется следующим выражением:

$$\rho_1 = \rho_a = \frac{\mu_{22}\mu_{33} - \mu_{23}\mu_{32} + (\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{33})p_2 + (\mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}\mu_{22})(1 - p_2)}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{11}\mu_{23}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{22}\mu_{31}}\lambda_1$$

Естественно, что если выполняется условие  $\mu_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , то выражение упрощается к известному:

$$\rho_1 = \frac{\mu_{22}\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}\lambda_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_{11}}$$

Исходя из (6)-(7), находим выражения для определения в общем виде загрузок  $\rho_2$  и  $\rho_3$ :

$$\rho_2 = \frac{\mu_{23}\mu_{32} - \mu_{21}\mu_{33} - (\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{11}\mu_{33} - \mu_{12}\mu_{33})p_2 - (\mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}\mu_{22})(1 - p_2)}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{11}\mu_{23}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{22}\mu_{31}}\lambda_1$$

$$\rho_3 = \frac{(\mu_{21}\mu_{32} + \mu_{23}\mu_{32} - \mu_{22}\mu_{31}) - (\mu_{11}\mu_{32} + \mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{33})p_2}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{11}\mu_{23}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{22}\mu_{31}}\lambda_1 - \frac{(\mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}\mu_{22} - \mu_{11}\mu_{22})(1 - p_2)}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} + \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} + \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{21}\mu_{33} - \mu_{11}\mu_{23}\mu_{32} - \mu_{13}\mu_{22}\mu_{31}}\lambda_1$$

Аналогично  $\rho_1$ , при нулевых недиагональных элементах загрузки  $\rho_2$  и  $\rho_3$  определяются стандартно:

$$\rho_2 = \frac{\mu_{11}\mu_{33}p_2}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{\mu_{22}}$$

$$\rho_3 = \frac{\mu_{11}\mu_{22}(1 - p_2)}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}\lambda_1 = \frac{\lambda_3}{\mu_{33}}$$

Определим следующие условия: во-первых, потоки направлены только из СМО1 в СМО2 и СМО3, в обратном направлении потоки не поступают, во-вторых, СМО2 и СМО3 в данном случае не оказывают влияния друг на друга, т.е. потоки из СМО2 не поступают в СМО3 и аналогично потоки из СМО3 не поступают в СМО2. Тогда, исходя из первого условия:  $\mu_{12} = \mu_{13} = 0$ ; и в соответствии со вторым условием:  $\mu_{23} = \mu_{32} = 0$ . Следовательно,  $\rho_1$  не зависит от недиагональных элементов матрицы  $\mathbf{M}$ , и определяется, как  $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_{11}}$ .

Таким образом, загрузка второй системы определяется как:  $\rho_2 = \frac{\mu_{11}\mu_{33}p_2 - \mu_{21}\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}\lambda_1$ , откуда видно, что загрузка  $\rho_2$  может быть представлена в виде:  $\rho_2 = \frac{p_2\lambda_1}{\mu_{22}} - \frac{\mu_{21}\lambda_1}{\mu_{11}\mu_{22}}$  или  $\rho_2 = \frac{p_2 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{11}}}{\mu_{22}}\lambda_1$ . С другой стороны, данная загрузка может быть найдена, как:

$$\rho_2 = \frac{p_2(\lambda_{in} - \lambda_{loss})}{\mu_{22}}$$

где:  $\lambda_{in}$  - интенсивность входящего потока в сеть (для рассматриваемой сети  $\lambda_{in} = \lambda_1$ ),  $\lambda_{loss}$  - интенсивность потерянного потока после обслуживания в первой



системе. Таким образом интенсивность поступающего трафика во вторую систему равна:

$$\lambda_2 = p_2 \lambda_1 - \lambda_1 \frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} = p_2 (\lambda_{in} - \lambda_{loss})$$

. Если недиагональный элемент  $\mu_{21}$  равен нулю, то  $\lambda_2 = p_2 \lambda_1$  и  $\lambda_{loss} = 0$ . При ненулевых потерях, коэффициент  $\mu_{21}$  отличен от нуля и найти его можно используя соотношение  $p_2 \lambda_1 - \lambda_1 \frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} = p_2 (\lambda_{in} - \lambda_{loss})$ , из которого  $p_2 \lambda_1 - \lambda_1 \frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} = p_2 (1 - p_{loss}) \lambda_1$  и  $p_2 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} = p_2 (1 - p_{loss})$ . Следовательно,  $\frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} = p_2 p_{loss}$ , и тогда:

$$\mu_{21} = p_2 p_{loss} \mu_{11} \tag{8}$$

Для СМОЗ, при аналогичных условиях  $\mu_{12} = \mu_{13} = 0$  и  $\mu_{23} = \mu_{32} = 0$ , загрузка определяется как:  $\rho_3 = \frac{(1-p_2)\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{22}\mu_{31}}{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}} \lambda_1$ , которую можно преобразовать и представить в следующем виде:

$$\rho_3 = \frac{(1-p_2)}{\mu_{33}} \lambda_1 - \frac{\mu_{31}}{\mu_{11}\mu_{33}} \lambda_1$$

Таким образом,  $\lambda_3 = (1-p_2) \lambda_1 - \frac{\mu_{31}}{\mu_{11}} \lambda_1$ , откуда при  $\mu_{31} = 0$  интенсивность  $\lambda_3 = (1-p_2) \lambda_1$ , что соответствует начальному распределению интенсивностей. Аналогично  $\mu_{21}$ , недиагональный элемент  $\mu_{31}$  находится, как:

$$\mu_{31} = (1-p_2) p_{loss} \mu_{11} \tag{9}$$

Таким образом, найдены все элементы матрицы интенсивностей обслуживания  $\mathbf{M}$  тензорной модели с учетом потерь. В полученных выражениях изменением величин  $\mu_{21}$  и  $\mu_{31}$  можно обеспечить изменение интенсивности трафика на выходе первой системы. Например, если первая система это система с явными потерями, что приводит к снижению трафика поступающего во вторую и третью системы, а (8),(9) позволяют учесть это уменьшение, определяемое вероятностью потерь в СМО1.

### 3. Численные результаты

Рассмотрим, использование полученных выражений на примере системы обработки информации вида М/М/1/Ν. Для такой системы вероятность потерь определяется как:  $p_{loss} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^N$  или  $p_{loss} = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{N+1}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N$ . Тогда, матрицу интенсивностей обслуживания можно представить в виде:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ \mu_{11} p_2 \frac{1-\frac{\lambda}{\mu_{11}}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu_{11}}\right)^{N+1}} \left(\frac{\lambda}{\mu_{11}}\right)^N & \mu_{22} & 0 \\ \mu_{11} (1-p_2) \frac{1-\frac{\lambda}{\mu_{11}}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu_{11}}\right)^{N+1}} \left(\frac{\lambda}{\mu_{11}}\right)^N & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix}$$





Далее, записываем матричное уравнение (4), решая которое относительно  $\begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b \\ \rho_c \end{pmatrix}$ , находим загрузки  $\rho_1, \rho_2$  и  $\rho_3$ , как:  $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b \\ \rho_c \end{pmatrix}$ . По известным загрузкам определяем интенсивности трафика в системы:  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3$ , как:  $\lambda_1 = \mu_{11}\rho_1, \lambda_2 = \mu_{22}\rho_2, \lambda_3 = \mu_{33}\rho_3$ .

В качестве численного примера, используем следующие исходные данные:  $\lambda = 15, \mu_{11} = 20, \mu_{22} = 25, \mu_{33} = 22, N = 4$ , вероятность перехода во вторую систему  $p_2 = 0.4$ . Тогда решая уравнение  $A^T M A P = A^T \Lambda$ , получаем:  $\begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b \\ \rho_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.965 \\ 1.117 \end{pmatrix}$ .

Откуда,  $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.215 \\ 0.367 \end{pmatrix}$  и  $\lambda_1 = 15, \lambda_2 = 5.378$  и  $\lambda_3 = 8.067$ . Действительно,  $p_{loss} = \frac{1-0.75}{1-0.75^{N+1}} 0.75^N = 0.104$  и потерянный трафик равен  $\lambda_{loss} = \lambda p_{loss} = 1.556$ . Следовательно, исходящий трафик из первой системы равен:  $\lambda = \lambda_{in} - \lambda_{loss} = 15 - 1.556 = 13.444$ , что соответствует входящему трафику во вторую и третью системы:  $\lambda = \lambda_2 + \lambda_3 = 5.378 + 8.067 = 13.444$ .

Полученные результаты подтверждаются имитационным моделированием в среде GPSS World. При времени моделирования 1000000 у.е. поступило на обслуживание 15001545 транзактов в первую систему ( $\lambda_1 = \frac{15001545}{10000000} \approx 15$ ), 5376503 во вторую систему ( $\lambda_2 = \frac{5376503}{10000000} = 5.376$ ), 8070814 в третью систему ( $\lambda_3 = \frac{8070814}{10000000} = 8.07$ ), количество потерянных транзактов составило 1554228, что соответствует вероятности  $p_{loss} = \frac{1554228}{15001545} = 0.104$ .

Полученные при моделировании результаты полностью подтверждают теоретические расчеты, что позволяет сделать вывод о возможности использования предложенного метода учета потерь в тензорной модели инфокоммуникационных сетей и систем.

## 4. Дополнительные рассуждения

Аналогичные результаты могут быть получены и для других частных сетей с целью обобщения полученного метода. Рассмотрим предложенный метод для двухфазной системы (рис. 2).

В таком случае, при  $\mu_{12} = 0$ , изменением величины  $\mu_{21}$  можно обеспечить изменение интенсивности трафика на выходе первой системы. Например, если первая система это система с явными потерями, то соотношение  $\frac{\mu_{21}}{\mu_{11}}$  есть вероятность потерь в данной системе, что приводит к снижению трафика поступающего во вторую систему. При этом  $\mu_{21} > 0$  и тогда  $\mu_{21} = \mu_{11} p_{loss1}$ , где  $p_{loss1}$  - вероятность потерь пакетов в первой системе. Тогда, при использовании модели потерь, как и ранее:  $M/M/1/N$ , матрицу интенсивностей можно представить в виде:

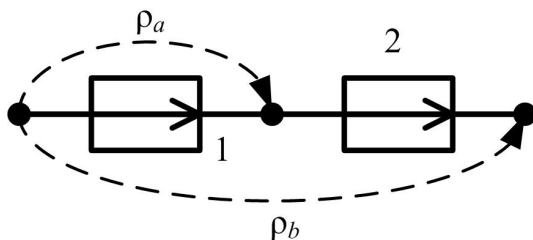


Рис. 2. Тензорная модель двухфазной системы обработки информации

$$M = \begin{pmatrix} \mu_{11} & 0 \\ \mu_{11} \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu_{11}}}{1 - (\frac{\lambda}{\mu_{11}})^{N+1}} \left(\frac{\lambda}{\mu_{11}}\right)^N & \mu_{22} \end{pmatrix}$$

Дальнейший ход решения аналогичен вышеприведенному. Аналогичный результат можно получить и для более сложных сетей (рис. 3).

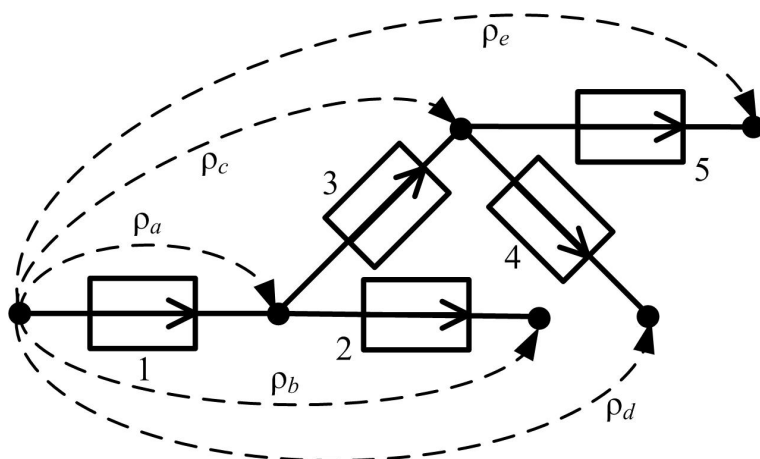


Рис. 3. Тензорная модель сети обработки информации

Используя предложенный подход, матрица интенсивностей обслуживания будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{11}p_{loss,1}p_2 & \mu_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{11}p_{loss,1}p_3 & 0 & \mu_{33} & 0 & 0 \\ \mu_{11}p_{loss,1}p_3p_4 & 0 & \mu_{33}loss_3 [\lambda p_3 (1 - p_{loss,1}), \mu_{33}, N_3] p_4 & \mu_{44} & 0 \\ \mu_{11}p_{loss,1}p_3 (1 - p_4) & 0 & \mu_{33}loss_3 [\lambda p_3 (1 - p_{loss,1}), \mu_{33}, N_3] (1 - p_4) & 0 & \mu_{55} \end{pmatrix}$$

где  $p_j$  - вероятность перехода в  $j$ -ую систему (при этом:  $p_2 + p_3 = 1$  и  $p_4 + p_5 = 1$ );



$p_{loss,1} = loss_1(\lambda, \mu_{11}, N_1)$  - вероятность потерь в первой системе;  
 $loss_i(\lambda, \mu, N)$  - функция потерь в  $i$ -ой системе.

## Заключение

В результате можно сделать вывод о том, что тензорный метод анализа сетей, как обладающий возможностями по учету процессно-структурного взаимодействия и гибкости применения, позволяет снизить вычислительные затраты на решение задачи управления эффективным использованием ресурсов сети, уменьшить задержки при динамическом управлении инфокоммуникационными системами и обеспечить хорошую масштабируемость сети.

При этом тензорный метод позволяет достаточно просто формализовать проектные процедуры с целью автоматизации процесса проектирования IP сетей [5], что позволит повысить качество обслуживания информационных потоков в сетях, работающих на базе стека протоколов TCP/IP, и обеспечить равномерную загрузку устройств сети и снизить время задержки, создаваемое сетевыми приложениями в транзитных и конечных узлах сети связи. Кроме того, использование в тензорной модели системы обработки информации ненулевых недиагональных элементов матрицы интенсивностей обслуживания позволяет учесть снижение интенсивности потока, связанное с потерями при обслуживании, что повышает адекватность отображения тензорной моделью свойств реальных систем.

## Список литературы

1. Крон Г. Тензорный анализ сетей. М.: Советское радио, 1978.
2. Пасечников И.И. Методология анализа и синтеза предельно нагруженных информационных сетей. М.: Машиностроение, 2004.
3. Лемешко А. В., Евсеева О. Ю. Тензорная геометризация структурно-функционального представления телекоммуникационной системы в базисе межполюсных путей и внутренних разрезов // Наукові записки УНДІЗ. - Вип. 1(13). - 2010. - С. 14-26.
4. Пономарев Д.Ю. Исследование характеристик пакетных сетей узловым методом тензорного анализа // Программные продукты и системы. – 2009. – №4. – С. 65-69.
5. Пономарев Д.Ю. Исследование вероятностно-временных характеристик IP сетей узловым методом тензорного анализа // ФИПС (Роспатент). – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. – Рег. №2009615358. – Дата: 25.09.2009.

## Справка об авторах





**Пономарев Дмитрий Юрьевич**  
**Ponomarev D.**

*участник конференции*

канд. техн. наук, доц.

Сибирский федеральный университет

Красноярск, Россия

[DPonomarev@sfu-kras.ru](mailto:DPonomarev@sfu-kras.ru)



## Предметный указатель

двухфазная система, 9  
интенсивность поступления, 3  
инвариант, 3  
матрица интенсивностей обслуживания, 8  
матрица перехода, 3  
примитивная сеть, 3  
тензорная модель, 4  
вероятность перехода, 5, 9, 10  
QoS, 2

